3. Resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 2^{3x} \le 4.2^{x^2} \\ \dfrac{4-x^2}{(x-1)^2} > 0 \end{cases}$

Solución

Comenzaremos resolviendo la primera inecuación $2^{3x} \le 4.2^{x^2}$, para lo cual escribiremos 4 = 2^2 y realizaremos las siguientes operaciones propias de la función exponencial

$$2^{3x} \le 4.2^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} \le 2^2.2^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} \le 2^{x^2+2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x \le x^2+2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x^2-3x+2$$

La inecuación $0 \le x^2-3x+2$ se puede escribir, factorizando el polinomio, de la forma $0 \le (x-1)(x-2)$ cuya solución se obtiene a partir de la siguiente tabla:

Signo	(-∞, 1)	(1, 2)	(2, +∞)
x - 1	-	+	+
x - 2	-	-	+
$(x-1)(x-2)$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos son solución de la inecuación, por ser la desigualdad no estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es S_1 = (-∞, 1] ∪ [2, +∞).

Para resolver la segunda inecuación $\dfrac{4-x^2}{(x-1)^2} > 0$, se factoriza el polinomio del numerador quedando $\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x-1)^2} > 0$. Teniendo en cuenta que $(x-1)^2 \ge 0$, y que para que no se anule el denominador ha de ser $x \neq 1$, el signo de la fracción únicamente depende del numerador y se determina en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -2)	(-2, 1) ∪ (1, 2)	(2, +∞)
2 - x	+	+	-
2 + x	-	+	+
(2 – x)(2 + x)	-	+	-

La solución de esta inecuación es S_2 = (-2, 1) ∪ (1, 2).

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es:

$$S = S_1 \cap S_2 = \big((-\infty, 1] \cup [2, +\infty)\big) \cap \big((-2, 1) \cup (1, 2)\big) = (-2, 1).$$