

Como ayuda para resolver este ejercicio se muestra a continuación la resolución de uno similar que aparece en la colección de ejercicios resueltos de sistemas de inecuaciones.

$$3. \text{ Resolver el sistema de inecuaciones } \begin{cases} 2^{3x} \leq 4 \cdot 2^{x^2} \\ \frac{4 - x^2}{(x-1)^2} > 0 \end{cases}$$

Solución

Comenzaremos resolviendo la primera inecuación $2^{3x} \leq 4 \cdot 2^{x^2}$, para lo cual escribiremos $4 = 2^2$ y realizaremos las siguientes operaciones propias de la función exponencial

$$2^{3x} \leq 4 \cdot 2^{x^2} \Leftrightarrow 2^{3x} \leq 2^2 \cdot 2^{x^2} \Leftrightarrow 2^{3x} \leq 2^{x^2+2} \Leftrightarrow 3x \leq x^2 + 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 3x + 2$$

La inecuación $0 \leq x^2 - 3x + 2$ se puede escribir, factorizando el polinomio, de la forma $0 \leq (x-1)(x-2)$ cuya solución se obtiene a partir de la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 1$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$(x-1)(x-2)$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos son solución de la inecuación, por ser la desigualdad no estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S_1 = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

Para resolver la segunda inecuación $\frac{4 - x^2}{(x-1)^2} > 0$, se factoriza el polinomio del numerador quedando

$$\frac{(2-x)(2+x)}{(x-1)^2} > 0. \text{ Teniendo en cuenta que } (x-1)^2 \geq 0, \text{ y que para que no se anule el}$$

denominador ha de ser $x \neq 1$, el signo de la fracción únicamente depende del numerador y se determina en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1) \cup (1, 2)$	$(2, +\infty)$
$2 - x$	+	+	-
$2 + x$	-	+	+
$(2-x)(2+x)$	-	+	-

La solución de esta inecuación es $S_2 = (-2, 1) \cup (1, 2)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es:

$$S = S_1 \cap S_2 = ((-\infty, 1] \cup [2, +\infty)) \cap ((-2, 1) \cup (1, 2)) = (-2, 1).$$