

Como ayuda para resolver este ejercicio se muestra a continuación la resolución de uno similar que aparece en la colección de ejercicios resueltos de sistemas de inecuaciones.

$$2. \text{ Resolver el sistema de inecuaciones } \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} \geq 0 \\ \frac{x + 1}{x - 5} < 0 \end{cases}$$

Solución

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} \geq 0$ se factoriza el polinomio $x^2 - 3x + 2$, para lo que se calculan sus raíces, que son $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Así, la inecuación se puede escribir de la forma $\frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 4} \geq 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores que intervienen en la ecuación en los intervalos determinados por sus raíces.

Signo	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$x - 1$	-	+	+	+
$x - 2$	-	-	+	+
$x - 4$	-	-	-	+
$\frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 4}$	-	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos, 1 y 2, son solución de la inecuación, pero no lo es 4 ya que anula el denominador.

Por tanto, la solución de la primera inecuación es $S_1 = [1, 2] \cup (4, +\infty)$.

La inecuación $\frac{x + 1}{x - 5} < 0$ se resuelve estudiando el signo del numerador y denominador en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, +\infty)$
$x + 1$	-	+	+
$x - 5$	-	-	+
$\frac{x + 1}{x - 5}$	+	-	+

Como la desigualdad es estricta $x = 1$ no verifica la inecuación y $x = 5$ tampoco ya que anula el denominador. Así, la solución de la segunda inecuación es $S_2 = (-1, 5)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es

$$S = S_1 \cap S_2 = ([1, 2] \cup (4, +\infty)) \cap (-1, 5) = [1, 2] \cup (4, 5).$$