

SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Se resuelve cada inecuación del sistema por separado, obteniéndose como solución de cada una de ellas un subconjunto de la recta real. La solución del sistema es la intersección de todos estos subconjuntos. Podemos encontrarnos con las diferentes situaciones, algunas de las cuales analizamos con ejemplos.

Ejemplo 1: Resolver el sistema de inecuaciones
$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ x^2 + 4 \leq (x+2)^2 \\ 3x + 5 < x + 7 \end{cases} .$$

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $-x^2 + x + 2 > 0$ se factoriza el polinomio $-x^2 + x + 2$, para lo que se calculan sus raíces, que son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$. Así, la inecuación se puede escribir de la forma $(x+1)(2-x) > 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores en los intervalos determinados por las raíces obtenidas, lo que proporciona el signo del polinomio de 2º grado.

| Signo | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|------------------|-----------------|-----------|----------------|
| $x + 1$ | - | + | + |
| $2 - x$ | + | + | - |
| $(x + 1)(2 - x)$ | - | + | - |

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S_1 = (-1, 2)$.

La inecuación $x^2 + 4 \leq (x+2)^2$ es equivalente a $x^2 + 4 \leq x^2 + 4x + 4$, es decir, $0 \leq 4x$ cuya solución es $S_2 = [0, \infty)$.

La inecuación $3x + 5 < x + 7$ es equivalente a $2x - 2 < 0$, es decir, $x < 1$ cuya solución es $S_3 = (-\infty, 1)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (-1, 2) \cap [0, \infty) \cap (-\infty, 1) = [0, 1)$.

Ejemplo 2: Resolver el sistema de inecuaciones
$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4}{3 - x} > 0 \\ 2(4x - 3) \leq 9x - 2 \end{cases} .$$

En primer lugar comenzaremos resolviendo cada inecuación por separado y después hallaremos la intersección de los conjuntos solución obtenidos.

Para resolver la inecuación $\frac{x^2 - 4}{3 - x} > 0$ se factoriza el numerador, que al ser diferencia de cuadrados permite escribir la inecuación de la forma $\frac{(x-2)(x+2)}{3-x} > 0$.

En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores que aparecen en el cociente que define a la inecuación en los intervalos determinados por sus raíces; lo que proporciona el signo de dicho cociente.

| Signo | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|--------------------------|-----------------|-----------|----------|---------------|
| $x - 2$ | - | - | + | + |
| $x + 2$ | - | + | + | + |
| $3 - x$ | + | + | + | - |
| $\frac{(x-2)(x+2)}{3-x}$ | + | - | + | - |

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $S_1 = (-\infty, -2) \cup (2, 3)$.

La inecuación $2(4x-3) \leq 9x-2$ es equivalente a $0 \leq x+4$, es decir, $-4 \leq x$ cuya solución es $S_2 = [-4, \infty)$.

Por lo tanto, la solución del sistema de inecuaciones es $S = S_1 \cap S_2 = [-4, -2) \cup (2, 3)$.