5. Resolver las inecuaciones: **a)** $yx - x \geq 1 + 2y$ **b)** $x^2 + y^2 - 6x + 2y < 0$

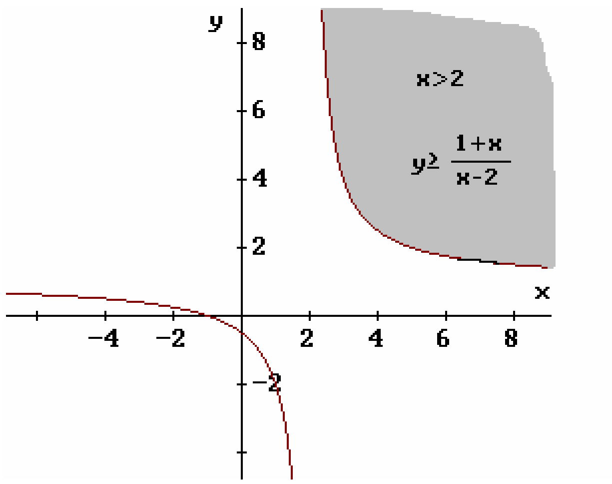
Solución

a) En primer lugar, para despejar la incógnita *y*, se pasan al primer miembro los términos en los que aparece esa incógnita y el resto se pasan al segundo, quedando $yx - 2y \geq 1 + x$.

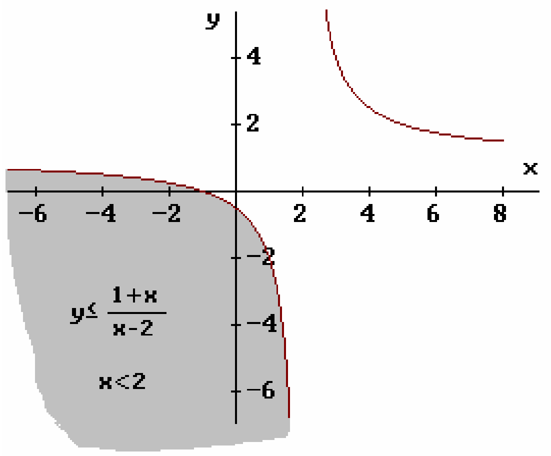
Se saca *y* factor común, obteniéndose $y(x - 2) \geq 1 + x$.

A continuación, se resuelve esta inecuación considerando tres casos según el signo de $x - 2$:

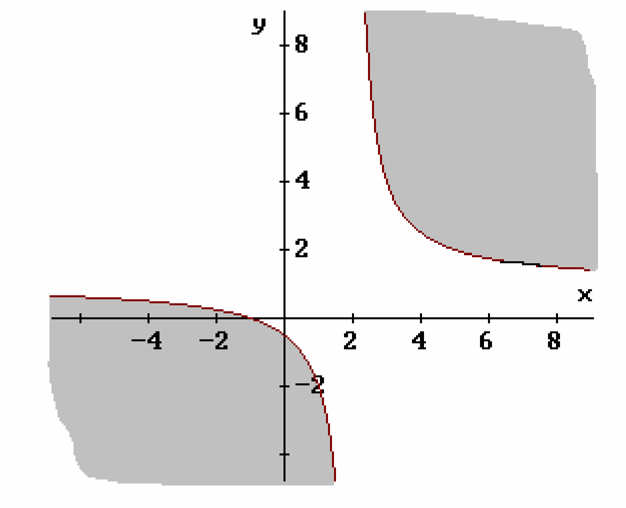
- Si $x = 2$ la inecuación queda $0 \geq 3$, desigualdad que es falsa para cualquier valor de *y*, por tanto, en este caso no existe solución.
- Si $x > 2$ entonces $x - 2 > 0$ y dividiendo la inecuación por esta expresión queda $y \geq \dfrac{1 + x}{x - 2}$; su solución está representada en la siguiente figura y corresponde al conjunto de puntos del plano (x, y) situados a la derecha de la recta $x = 2$ y por encima o en la curva $y = \dfrac{1 + x}{x - 2}$



- Si $x < 2$ entonces $x - 2 < 0$ y dividiendo la inecuación por esta expresión queda $y \leq \dfrac{1 + x}{x - 2}$; su solución está representada en la siguiente figura



La solución de la inecuación inicial es la unión de las soluciones obtenidas en cada uno de los casos anteriores y corresponde a la región representada en la siguiente figura



b) En primer lugar se considera la igualdad, $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.

Al ser una ecuación polinómica de segundo grado, tanto en x como en y, veamos si corresponde a una circunferencia. Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de obtener una expresión de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 0 \Leftrightarrow \left((x-3)^2 - 9\right) + \left((y+1)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$$

Esta última ecuación corresponde a la circunferencia de centro (3, -1) y radio $\sqrt{10}$, que se representa en la figura. Para determinar qué región corresponde a la solución de la inecuación, se elige un punto que no esté en la circunferencia, por ejemplo (1, 0) (está dentro de la circunferencia) y se sustituye en la inecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y < 0$ quedando $-5 < 0$. Al ser verdadera esta desigualdad, la solución son los puntos de la región interior a la circunferencia y aparecen sombreados en la siguiente figura.