Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

3. Resolver la inecuación $\dfrac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} > \dfrac{x^2 - 2}{x}$

Solución

Observar que si se multiplica en cruz, la desigualdad podría cambiar de sentido dependiendo del signo de los denominadores. Por ello es mejor realizar las siguientes operaciones, con el objeto de agrupar en un miembro todos los términos.

Se pasa restando el segundo miembro al primero, $\dfrac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} - \dfrac{x^2 - 2}{x} > 0$.

Realizando operaciones en el primer miembro de la inecuación queda

$$\frac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} - \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{4x + x^2 - 2}{x(x + 1)} - \frac{x^2 - 2}{x} = \frac{4x + x^2 - 2 - (x^2 - 2)\,(x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{-x^3 + 6x}{x(x + 1)}$$

y factorizando el numerador se obtiene $\dfrac{-x^3 + 6x}{x(x + 1)} = \dfrac{x\,(6 - x^2)}{x\,(x + 1)} = \dfrac{x\,(\sqrt{6} + x)\,(\sqrt{6} - x)}{x\,(x + 1)}$.

Teniendo en cuenta que x no puede ser cero, ya que este valor anula los denominadores de la inecuación inicial, se puede simplificar x en la expresión anterior obteniéndose la siguiente inecuación equivalente a la inicial, $\dfrac{(\sqrt{6} + x)\,(\sqrt{6} - x)}{x + 1} > 0$. Para resolverla, se analiza el signo de cada factor como se muestra en la siguiente tabla.

Signo	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$(-\sqrt{6}, -1)$	$(-1, 0) \cup (0, \sqrt{6})$	$(\sqrt{6}, +\infty)$
$\sqrt{6} + x$	-	+	+	+
$\sqrt{6} - x$	+	+	+	-
$x + 1$	-	-	+	+
$\dfrac{(\sqrt{6} + x)\,(\sqrt{6} - x)}{x + 1}$	+	-	+	-

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que no son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (-1, 0) \cup (0, \sqrt{6})$.