Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

2. Resolver las inecuaciones: **a)** $x^2 + 6x - 1 \leq 3x^2 + 3x - 6$ **b)** $3x^2 + 4 < x^4 + 3x^3 + 3x$

Solución

a) Al ser una inecuación polinómica de *segundo grado*, se agrupan todos los términos en un miembro, por ejemplo, si se pasan al primero queda $-2x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

Como las raíces del polinomio $-2x^2 + 3x + 5$ son $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)5}}{2(-2)} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 7}{-4} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{5}{2} \end{cases}$,

la inecuación se puede escribir de la forma $-2(x + 1)\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \leq 0$, y multiplicando por -1 se obtiene $2(x + 1)\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \geq 0$.

En la siguiente tabla se estudia el signo de los factores, en los intervalos determinados por las raíces, para obtener el signo del polinomio.

Signo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
$x + 1$	-	+	+
$x - \frac{5}{2}$	-	-	+
$2(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$	+	-	+

Así los puntos del conjunto $(-\infty, -1) \cup \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$ son solución de la inecuación. Además, como los extremos de los intervalos también son solución, por ser la desigualdad no estricta, se tiene que el conjunto de soluciones es $(-\infty, -1] \cup \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) Se pasan todos términos al segundo miembro quedando $0 < x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

Para factorizar el polinomio se calculan sus raíces dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & & -4 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Por tanto, la inecuación queda de la forma $0 < (x - 1)(x + 4)(x^2 + 1)$.

Como el último factor es siempre positivo, para determinar el signo del polinomio, basta considerar el signo de los dos primeros factores, como se muestra en la tabla siguiente.

Signo	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 4$	-	+	+
$(x - 1)(x + 4)(x^2 + 1)$	+	-	+

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que no son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.