INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

La expresión general de una inecuación con dos incógnitas, x e y, es $F(x, y) > 0$, donde F es una función.

Ejemplo 12: Son inecuaciones con dos incógnitas las siguientes:

$y - x + 3 < 0$ $\quad$ $x + \ln y > 4$ $\quad$ $x^2 - 5x - y \geq 3 - 4x^3$ $\quad$ $e^{x+2} \leq y - 2$

En esta unidad, principalmente se consideran aquellas inecuaciones en las que se pueda despejar una incógnita, es decir, aquellas que sean equivalentes a una de la forma $y > f(x)$ o $x > g(y)$, siendo f y g funciones de una variable.

Para resolver la inecuación $y > f(x)$ se representa la curva $y = f(x)$ que determina dos regiones en el plano, una en la que se verifica la desigualdad $y < f(x)$ y otra en la que se cumple $y > f(x)$. La solución de la inecuación es el conjunto de puntos de la región en la que se verifica la desigualdad correspondiente a la inecuación. Análogamente se procede si la inecuación es $x > g(y)$.

Ejemplo 13: Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $7x - 4 - 3y \geq x + 5$

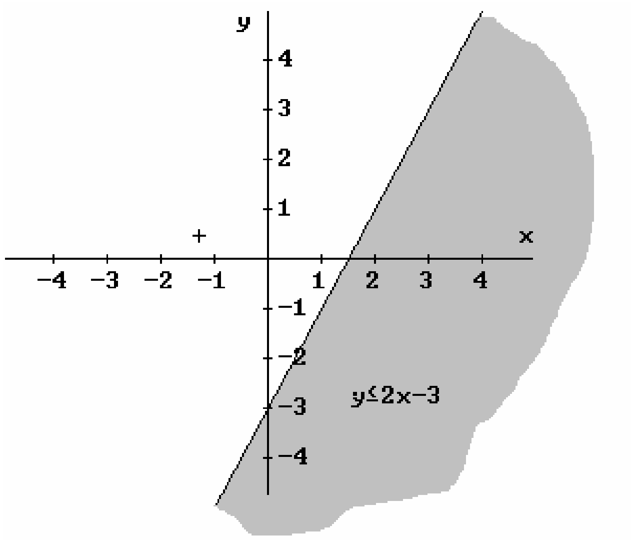
Se pasa $7x - 4$ al segundo miembro $\quad$ $-3y \geq -6x + 9$

se despeja y, multiplicando por $\frac{-1}{3}$ $\quad$ $y \leq 2x - 3$

Representando la función $y = 2x - 3$, se obtiene una recta que determina dos semiplanos, uno de los cuáles estará contenido en la solución.

Para determinar este semiplano, se elige un punto que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0, 0), y se sustituye en la última desigualdad $y \leq 2x - 3$, obteniéndose $0 \leq -3$. Al ser esta desigualdad falsa se sigue que los puntos del otro semiplano son solución de la inecuación.

También son solución de la inecuación los puntos de la recta puesto que verifican la inecuación, al ser la desigualdad no estricta.

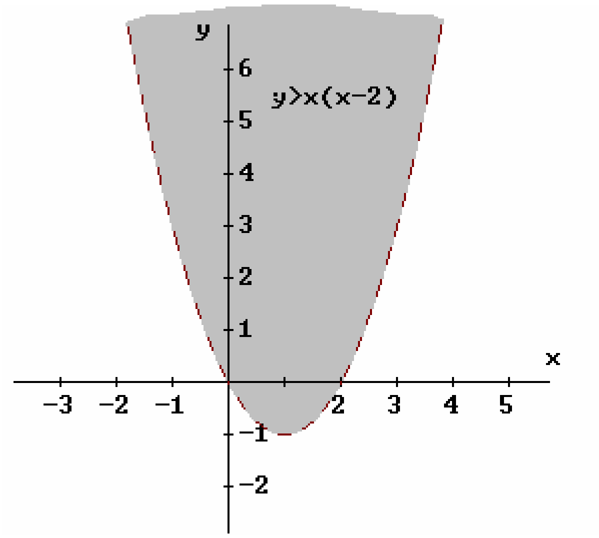


b) $y > x(x - 2)$

Representando $y = x(x - 2)$ se obtiene la parábola que pasa por los puntos (0, 0), (2, 0) y cuyo eje es $x = 1$.

Esta parábola divide al plano en dos regiones, en una de ellas los puntos verifican $y > x(x - 2)$ (ésta será la solución) y en la otra $y < x(x - 2)$.

Para determinar la región S, solución de la inecuación, basta considerar un punto que no esté en la curva, por ejemplo el punto (1, 3), que sustituido en la inecuación da lugar a 3 > -1, al ser esta desigualdad cierta la solución es la región a la que pertenece dicho punto, que en este caso corresponde al interior de la parábola.



c) $2x^2 - y^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 2y^2 + 2y$

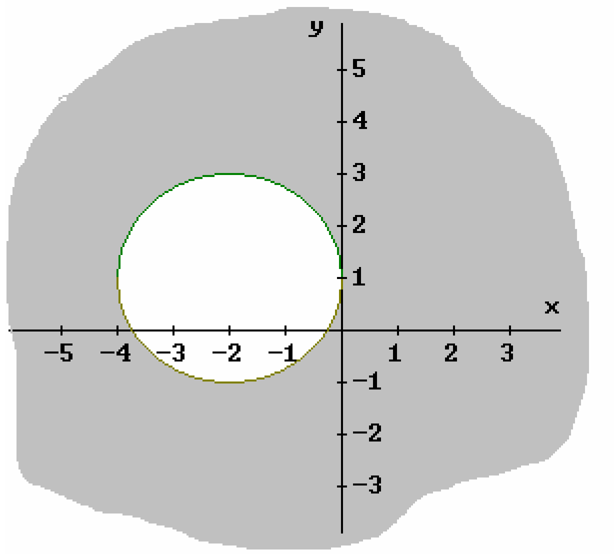
En esta inecuación no se puede despejar ninguna de la dos incógnitas de forma única, por tanto, deberemos proceder de otra manera. En primer lugar se considera la igualdad $2x^2 - y^2 + 4x + 1 = x^2 - 2y^2 + 2y$ o equivalentemente, pasando todos los términos al primer miembro, $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Al ser una ecuación polinómica de segundo grado, tanto en x como en y, veamos si corresponde a una circunferencia de centro (a, b) y radio r, es decir, si se puede escribir de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de formar los cuadrados perfectos $(x - a)^2$ y $(y - b)^2$.

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left((x + 2)^2 - 4\right) + \left((y - 1)^2 - 1\right) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Representando $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ se obtiene la circunferencia de centro (-2, 1) y radio 2, que divide al plano en dos regiones, una interior y otra exterior a la circunferencia.

Para determinar la región que corresponde a los puntos solución de la inecuación, basta considerar un punto que no esté en la curva, por ejemplo (1, 1), que sustituido en la inecuación inicial da lugar a $6 \geq 1$. Al ser esta desigualdad cierta, la solución es la región a la que pertenece dicho punto, que en este caso corresponde al exterior de la circunferencia.


y
5
4
3
2
1
x
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3

d) Resolver la inecuación $y \leq \sqrt{x}$

En primer lugar, hay que tener en cuenta que las soluciones serán puntos del plano (x, y) con $x \geq 0$, ya que en caso contrario no existiría su raíz cuadrada.

Representando $y = \sqrt{x}$ se obtiene la curva de la figura, que divide en dos regiones al semiplano correspondiente a los puntos con $x \geq 0$, en una de ellas los puntos verifican $y < \sqrt{x}$ y en la otra $y > \sqrt{x}$.

Considerando, por ejemplo, el punto (0, 1) y sustituyéndolo en la inecuación se obtiene $1 \leq \sqrt{0}$. Al ser falsa la anterior desigualdad, se deduce que la región que no contiene al punto (0, 1) son solución de la inecuación. Además al ser la desigualdad no estricta, también son solución los puntos de la curva.