

3. Resolver la inecuación $\frac{4x}{(1+x)^2} \geq 1$

Solución

En primer lugar, se pasa restando el segundo miembro al primero quedando $\frac{4x}{(1+x)^2} - 1 \geq 0$.

Realizando operaciones en el primer término queda

$$\frac{4x}{(1+x)^2} - 1 = \frac{4x - (1+x)^2}{(1+x)^2} = \frac{4x - 1 - 2x - x^2}{(1+x)^2} = \frac{-1 + 2x - x^2}{(1+x)^2} = \frac{-(x-1)^2}{(1+x)^2}$$

Así, una inecuación equivalente a la inicial es $\frac{-(x-1)^2}{(1+x)^2} \geq 0$.

En esta inecuación, se observa que el primer miembro es negativo o cero para cualquier valor de x distinto de -1 , por tanto, la única posibilidad de que se cumpla la inecuación es que el primer miembro sea cero. De esto se deduce que la única solución es $x = 1$.

Este ejercicio se puede resolver de otra forma teniendo en cuenta que, al ser $x \neq -1$, se pueden multiplicar los dos miembros de la inecuación inicial por el denominador, que en este caso es positivo, obteniéndose así $4x \geq (1+x)^2$ que es una inecuación equivalente a la inicial más sencilla.

Realizando operaciones, se obtiene

$$4x \geq (1+x)^2 \Leftrightarrow 4x \geq 1 + 2x + x^2 \Leftrightarrow 0 \geq 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow 0 \geq (1-x)^2$$

Al ser el segundo miembro un cuadrado, es positivo o cero para cualquier valor de x , por tanto, la única solución de la inecuación es el valor de x que anula ese cuadrado, es decir, $x = 1$.