INECUACIONES RACIONALES CON UNA INCÓGNITA

Son aquellas equivalentes a una inecuación de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Ejemplo 9: La inecuación $\frac{x - 2}{x} \geq \frac{2x - 1}{x + 1}$ es una inecuación racional que es equivalente a $\frac{x - 2}{x} - \frac{2x - 1}{x + 1} \geq 0$ y realizando operaciones se obtiene $\frac{-x^2 - 2}{x\,(x + 1)} \geq 0$

> NOTA: Es importante observar que la inecuación $\frac{x - 2}{x} \geq \frac{2x - 1}{x + 1}$ no tiene porqué ser equivalente a la que se obtiene multiplicando en cruz, $(x - 2)(x + 1) \geq x(2x - 1)$, ya que la desigualdad puede cambiar de sentido dependiendo del signo de x y de $x + 1$.

Para resolverlas se pasan a un miembro todos términos para que en el otro quede 0, luego se estudia el signo de la fracción que se ha obtenido, descomponiendo el numerador y denominador en producto de factores y teniendo en cuenta que el denominador no se puede anular.

Ejemplo 10: Resolver la inecuación $\frac{2x^3 - 3x^2 - 3}{x^2 - 1} \geq x$

Pasando x al segundo término queda $\frac{2x^3 - 3x^2 - 3}{x^2 - 1} - x \geq 0$

y efectuando la diferencia se obtiene $\frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 1} \geq 0$

Se descompone el numerador en producto de factores dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio cociente que se obtiene en la anterior división es $x^2 + 1$, que no tiene raíces reales. Por tanto, el numerador queda $x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1)$

Se factoriza el denominador, teniendo en cuenta que es diferencia de cuadrados, $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Así la inecuación inicial se puede escribir $\frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \geq 0$.

Al ser $x^2 + 1 > 0$ para cualquier valor de x, el signo de $\frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$ se puede determinar estudiando el signo del resto de factores.

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 3$	-	-	-	+
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+
$\frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$	-	+	-	+

Observar que de los extremos de los intervalos, ni -1 ni 1 son solución de la inecuación ya que anulan el denominador, pero sí lo es -3 . Por tanto, la solución es el conjunto $(-1, 1) \cup [3, +\infty)$.