Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

Inecuaciones polinómicas de segundo grado

Estas inecuaciones se pueden escribir de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, con $a \neq 0$.
Una forma de resolverlas es estudiar el signo del polinomio de segundo grado que se ha obtenido descomponiéndolo en producto de factores.

Ejemplo 7: Resolver la inecuación $3x^2 + 5x > x^2 + 3$

Esta inecuación es equivalente a $2x^2 + 5x - 3 > 0$
Para factorizar el polinomio se calculan sus raíces, obteniendose $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

Por tanto, la inecuación queda $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) > 0$

El signo de $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$, depende del signo del factor $x - \frac{1}{2}$ y del signo de $x + 3$, que a su vez dependen de que x sea mayor o menor que $\frac{1}{2}$ y que -3 respectivamente. En la tabla siguiente se especifica el signo de cada uno de los factores en los intervalos determinados por las raíces obtenidas, lo que proporciona el signo del polinomio de segundo grado.

Signo	$(-\infty, -3)$	$\left(-3, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$x - \frac{1}{2}$	-	-	+
$x + 3$	-	+	+
$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$	+	-	+

Observar que los extremos de los intervalos no son solución de la inecuación, por ser la desigualdad estricta. Por tanto, el conjunto de soluciones es $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Otra forma de resolver la inecuación $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) > 0$ es tener en cuenta que el signo de los dos factores correspondientes a los polinomios ha de ser el mismo. Así:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) > 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x - \frac{1}{2} > 0 \text{ y } x + 3 > 0 \\ \text{o} \\ x - \frac{1}{2} < 0 \text{ y } x + 3 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x > \frac{1}{2} \text{ y } x > -3 \\ \text{o} \\ x < \frac{1}{2} \text{ y } x < -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x > \frac{1}{2} \\ \text{o} \\ x < -3 \end{array}\right.$$

Por tanto, el conjunto de soluciones es $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Inecuaciones polinómicas de cualquier grado

Son inecuaciones que se pueden escribir de la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 > 0$, con $a_n \neq 0$.

Para su resolución, se procede de forma similar al caso de las inecuaciones polinómicas de segundo grado, es decir, se factoriza el polinomio y se estudia su signo.

Ejemplo 8: Resolver la inecuación $2x^3 - 4x^2 - 7x \leq -x^2 + x + 3$.

La inecuación anterior es equivalente a $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \leq 0$
Se descompone el polinomio en producto de factores, para ello se calculan sus raíces dividiendo por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & -8 & -3 \\
-1 & & -2 & 5 & 3 \\
\hline
 & 2 & -5 & -3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
3 & & 6 & 3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

Por tanto, la inecuación queda: $(x + 1)(x - 3)(2x + 1) \leq 0$. En la tabla siguiente se estudia el signo de cada uno de los factores, en los intervalos determinados por las raíces del polinomio, y efectuando el producto se obtiene su signo.

Signo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$	$(3, +\infty)$
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$2x + 1$	-	-	+	+
$(x + 1)(x - 3)(2x + 1)$	-	+	-	+

Sustituyendo los extremos de los intervalos se observa que son solución de la inecuación. Por tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{-1}{2}, 3\right]$