

## ECUACIONES NO POLINÓMICAS CON UNA INCÓGNITA

Una ecuación no polinómica es, en general, más difícil de resolver que una ecuación polinómica. Por tanto, únicamente se tratan algunos tipos particulares.

### Ecuaciones racionales

Son aquellas ecuaciones equivalentes a una ecuación cuyo primer término es un cociente de polinomios y el segundo es cero, es decir,  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ , con  $P(x)$  y  $Q(x)$  polinomios.

Ejemplo 14: Son ecuaciones racionales:  $\frac{x^2 - 1}{8x^4 - x + 1} = 0$ ,  $\frac{x^3 - 1}{x^8 + 3x} = \frac{x^2 - 1}{4x^5}$

No son ecuaciones racionales:  $4x - 5\sqrt{x} = 0$ ,  $3x - 5\cos x + 8 = 0$

La soluciones de estas ecuaciones son las soluciones de la ecuación polinómica obtenida al igualar el numerador a cero que además no anulan al polinomio del denominador, es decir, las soluciones de la ecuación  $P(x) = 0$  que no anulan al denominador  $Q(x)$ .

Ejemplo 15: Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a)  $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$

Igualando el numerador a 0 se obtiene la ecuación polinómica  $x^2 + 6x + 5 = 0$ , cuyas soluciones son:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

El denominador de la ecuación inicial,  $x + 1$ , se anula para la solución  $x = -1$ , por tanto, la única solución de la ecuación  $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$  es  $x = -5$ .

Se observa que en esta ecuación al factorizar el polinomio del numerador, la ecuación queda  $\frac{(x + 1)(x + 5)}{x + 1} = 0$  y simplificando el factor  $x + 1$  se obtiene la ecuación  $x + 5 = 0$  cuya solución es  $x = -5$ .

b)  $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2}$

Para resolverla, en primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2} &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} - \frac{x(x + 2)}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2 - (x^2 + 2x)}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x}{x^2 - 4} = 0 \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación  $\frac{2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$ , se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose

$$2 - 2x = 0 \text{ cuya solución es } x = 1$$

y como  $x = 1$  no anula el polinomio del denominador, se tiene que es la solución.

En consecuencia, la solución de la ecuación  $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2}$  es  $x = 1$ .

## Ecuaciones con raíces

Son aquellas en las que la incógnita aparece en el radicando de una o varias raíces.

Para resolver este tipo de ecuaciones se procede como sigue:

- si sólo hay una raíz en cuyo radicando está la incógnita, se despeja esta raíz en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros de la igualdad al índice de la raíz, obteniéndose una ecuación sin raíces
- si hay más de una raíz en cuyo radicando está la incógnita, se despeja una de las raíces en un miembro de la ecuación y se elevan ambos miembros al índice de dicha raíz. Se repite este proceso las veces que sea necesario, hasta obtener una ecuación sin raíces
- En cualquier caso, hay que tener en cuenta que si el índice de la raíz es un número par entonces la ecuación que se obtiene no tiene por qué ser equivalente a la inicial, ya que pueden aparecer otras soluciones. Por tanto, una vez calculadas las soluciones de esta ecuación sin raíces, se ha de comprobar si realmente son soluciones de la ecuación inicial

Ejemplo 16: Resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $\sqrt[3]{x+1} = x - \sqrt[3]{x+1}$

Como únicamente hay una raíz,  $\sqrt[3]{x+1}$ , para resolverla se pasa la raíz del segundo miembro al primero, quedando

$$2\sqrt[3]{x+1} = x$$

se elevan al cubo ambos miembros obteniéndose una ecuación polinómica

$$\left(2\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = x^3 \Leftrightarrow 8(x+1) = x^3 \Leftrightarrow x^3 - 8x - 8 = 0$$

Para resolver esta ecuación polinómica, se factoriza mediante la regla de Ruffini el polinomio  $x^3 - 8x - 8$ .

	1	0	-8	-8
-2		-2	4	8
	1	-2	-4	0

Así, la ecuación polinómica se puede escribir de la forma  $(x + 2)(x^2 - 2x - 4) = 0$  y sus soluciones son los valores que anulan alguno de los dos factores:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación  $x^3 - 8x - 8 = 0$  son  $x = -2$ ,  $x = 1 + \sqrt{5}$  y  $x = 1 - \sqrt{5}$ .

Esta ecuación polinómica es equivalente a la inicial ya que el índice de la raíz es impar, por tanto, se puede asegurar que

$$x = -2, x = 1 + \sqrt{5} \text{ y } x = 1 - \sqrt{5} \text{ son las soluciones de la ecuación } \sqrt[3]{x+1} = x - \sqrt[3]{x+1}.$$

b)  $x - 2 = 3 + \sqrt{4x - 24}$

En primer lugar, se despeja la raíz en un lado de la igualdad  $x - 5 = \sqrt{4x - 24}$

se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad  $(x - 5)^2 = 4x - 24$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica  $x^2 - 14x + 49 = 0$

Resolviendo esta ecuación polinómica se obtiene que su solución es  $x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = 7$  doble.

En este caso se ha de comprobar si las soluciones de la ecuación polinómica lo son también de la ecuación inicial ya que al ser el índice de la raíz par, la ecuación obtenida puede no ser equivalente. Sustituyendo  $x = 7$  en  $x - 2 = 3 + \sqrt{4x - 24}$  queda  $5 = 5$  y, por tanto, se tiene que  $x = 7$  es solución de la ecuación inicial.

c)  $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$

En primer lugar, se deja la raíz en un lado de la igualdad  $\sqrt{x+1} = x - 1$

se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad  $x + 1 = (x - 1)^2$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica  $x^2 - 3x = 0$

Factorizando el polinomio, la ecuación queda  $x(x - 3) = 0$ , cuyas soluciones son  $x = 0$  y  $x = 3$ .

Sustituyendo estas soluciones en la ecuación inicial se obtiene:

$x = 0$  no es solución de la ecuación  $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$ , ya que sustituyendo se obtiene  $2 = 0$

$x = 3$  es solución de la ecuación  $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$ , ya que sustituyendo se obtiene  $6 = 6$

Por tanto, la ecuación  $\sqrt{x+1} + x + 1 = 2x$  tiene como solución  $x = 3$ .

d)  $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x+1} = 2$

En primer lugar, se despeja una raíz  $\sqrt{2x+9} = 2 + \sqrt{x+1}$

se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad  $2x + 9 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x+1}$

se deja la raíz en un miembro  $x + 4 = 4\sqrt{x+1}$

se eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad  $x^2 + 8x + 16 = 16x + 16$

y haciendo operaciones, se obtiene la ecuación polinómica  $x^2 - 8x = 0$

Factorizando el polinomio, la ecuación queda  $x(x - 8) = 0$ , cuyas soluciones son  $x = 0$  y  $x = 8$ .

Sustituyendo estos valores de la incógnita en la ecuación  $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x+1} = 2$  se comprueba que en ambos casos se cumple la igualdad, en consecuencia, las soluciones son  $x = 0$  y  $x = 8$ .

e)  $\sqrt{\frac{1}{x}} = x$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad, obteniéndose la ecuación  $\frac{1}{x} = x^2$ .

Para resolver la ecuación racional obtenida, en primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0:

$$\frac{1}{x} = x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^3}{x} = 0$$

Para resolver la ecuación  $\frac{1 - x^3}{x} = 0$ , se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose

$$1 - x^3 = 0 \text{ cuya solución es } x = 1$$

y como  $x = 1$  no anula el polinomio del denominador, se tiene que es la solución.

Sustituyendo  $x = 1$  en la ecuación  $\sqrt{\frac{1}{x}} = x$  se comprueba que se cumple la igualdad, por tanto, la solución es  $x = 1$ .

## Ecuaciones con funciones elementales sencillas (exponencial y logaritmo)

Teniendo en cuenta que la función exponencial es inversa de la logarítmica y viceversa, en ocasiones es posible resolver ciertas ecuaciones en las que aparece una de estas dos funciones.

Para facilitar esta resolución, se indican a continuación algunas cuestiones a tener en cuenta:

- Es conveniente comenzar a resolver la ecuación despejando en uno de sus miembros un término que contenga una de estas funciones
- Si en una ecuación se aplica la función exponencial o logarítmica a los dos miembros se obtiene una ecuación equivalente, en otras palabras, la función exponencial y logarítmica son inyectivas
- La función exponencial siempre toma valores positivos
- Únicamente se puede calcular el logaritmo de números positivos
- Puede ser conveniente aplicar algunas propiedades de las potencias para simplificar la ecuación:

$$e^a e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^a)^b = e^{ab}$$

- Puede ser conveniente aplicar algunas propiedades de los logaritmos para simplificar la ecuación:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^b) = b \ln a$$

Ejemplo 17: Resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $\ln x + 1 = 1$

Haciendo operaciones para dejar el término logarítmico en un miembro queda

$$\ln x = 0$$

aplicando la función exponencial que es inversa de la logarítmica se obtiene

$$e^{\ln x} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

Por tanto, la solución de la ecuación  $\ln x + 1 = 1$  es  $x = 1$

b)  $e^{2x-3} - 3 = -2$

Haciendo operaciones para dejar el término exponencial en un miembro queda

$$e^{2x-3} = 1$$

tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación

$$\ln(e^{2x-3}) = \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la solución de la ecuación  $e^{2x-3} - 3 = -2$  es  $x = \frac{3}{2}$

c)  $e^{3x+4} = -1$

Esta ecuación no tiene solución ya que la función exponencial toma siempre valores positivos.

d)  $\ln(x^2 - 6) = \ln(-x)$

Teniendo en cuenta que la función logaritmo es inyectiva se obtiene la ecuación polinómica:

$$x^2 - 6 = -x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

Las soluciones de la ecuación polinómica obtenida son  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Sustituyendo estos valores de  $x$  en la ecuación original se obtiene que la única solución de la ecuación  $\ln(x^2 - 6) = \ln(-x)$  es  $x = -3$ , ya que los términos  $\ln(x^2 - 6)$  y  $\ln(-x)$  no existen para  $x = 2$ .

e)  $e^{5x+5} - e^{-x-1} = 0$

Esta ecuación es equivalente a  $e^{5x+5} = e^{-x-1}$  y teniendo en cuenta que la función exponencial es inyectiva, se obtiene:

$$5x + 5 = -x - 1 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Por tanto, la solución de la ecuación  $e^{5x+5} - e^{-x-1} = 0$  es  $x = -1$ .