CONCEPTOS

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones en las que aparece una o varias incógnitas.

En esta unidad se estudian las ecuaciones con una incógnita que se representa por una letra, generalmente la letra x. En un último apartado se hace una breve referencia a las ecuaciones con dos incógnitas, x e y.

Cuando la igualdad entre las dos expresiones se verifica para cualquier valor numérico de las incógnitas se llama identidad y no se considera una ecuación.

Ejemplo 1:

a) $-2x = 8$ es una ecuación con una incógnita

b) $\sqrt{x} + 3 - \ln x = 3$ es una ecuación con una incógnita

c) $x^2 - 2x = y - 1$ es una ecuación con dos incógnitas

d) La igualdad $3x + 6 = 3(x+2)$ no se considera una ecuación sino una identidad porque se verifica para cualquier valor de la variable x. En concreto, esta igualdad es cierta para cualquier valor de x debido a la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
Asimismo la igualdad $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ es una identidad.

En toda la unidad se trabaja en el conjunto de los números reales.

Una **solución** de una ecuación es un valor numérico de cada una de las incógnitas para los que se verifica la igualdad.

Ejemplo 2:

a) $x = 9$ es solución de la ecuación $\sqrt{x} = x - 6$, ya que $\sqrt{9} = 9 - 6$

b) $x = -2$ y $x = 5$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$, ya que $(-2)^2 - 3(-2) - 10 = 0$ y $5^2 - 3.5 - 10 = 0$

c) La ecuación $e^x + 7 = 3$ no tiene ninguna solución, ya que e^x es un número positivo para cualquier valor de x

d) $(x, y) = (-1, 3)$ es solución de la ecuación $4x + y = -1$, ya que $4(-1) + 3 = -1$

Resolver una ecuación es calcular el conjunto de todas sus soluciones.

Ejemplo 3:

a) La ecuación $x^2 = 9$ tiene por soluciones $x = 3$ y $x = -3$

b) La ecuación $3x + 1 = 16$ tiene por solución $x = 5$

c) La ecuación $2^x = 16$ tiene por solución $x = 4$

d) La ecuación $e^x = 0$ no tiene solución

e) La ecuación $y - e^x + 4 = 0$ tiene por solución el conjunto de puntos $(x, e^x - 4)$ con x cualquier número real

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 4:

a) Las ecuaciones $3x + 1 = 16$ y $3x = 15$ son equivalentes, ya que ambas tienen como única solución $x = 5$

b) Las ecuaciones $x^2 = 9$ y $5x = 15$ no son equivalentes, ya que, aunque $x = 3$ es solución para ambas, la primera ecuación tiene además como solución $x = -3$

A continuación se enumeran algunas operaciones que permiten transformar una ecuación en otra equivalente, con el objetivo de obtener una ecuación más sencilla de resolver que la primera:

- Sumar o restar una misma expresión a los dos miembros de la ecuación.
- Multiplicar o dividir por una misma expresión no nula los dos miembros de la ecuación.

En algunos casos, mediante las dos operaciones anteriores, se puede resolver una ecuación obteniendo ecuaciones equivalentes hasta lograr despejar la incógnita.

Ejemplo 5:

Son ecuaciones equivalentes a la ecuación $6x - 13 = 3x + 2$ las siguientes:

sumando 13 a los dos miembros	$6x = 3x + 15$
restando $3x$ a los dos miembros	$3x = 15$
multiplicando por $\frac{1}{3}$ los dos miembros	$x = 5$

Por tanto, la ecuación $6x - 13 = 3x + 2$ tiene una única solución que es $x = 5$