7. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ **b)** $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2$

Solución

a) Se despeja la única raíz que aparece en la ecuación, quedando

$$2x - 6 = \sqrt{2x}$$

se elevan al cuadrado ambos miembros obteniéndose una ecuación polinómica

$$(2x - 6)^2 = \left(\sqrt{2x}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 24x + 36 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 26x + 36 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación polinómica son:

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4.4.36}}{2.4} = \frac{26 \pm \sqrt{676-576}}{8} = \frac{26 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{26 \pm 10}{8} = \begin{cases} \frac{9}{2} \\ 2 \end{cases}$$

En este caso, se ha de comprobar si estas soluciones lo son también de la ecuación inicial ya que al haber elevado al cuadrado, la ecuación obtenida puede no ser equivalente:

- sustituyendo $x = \frac{9}{2}$ en la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ queda $4 = 4$, de donde se concluye que $x = \frac{9}{2}$ es solución de la ecuación inicial
- sustituyendo $x = 2$ en la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ queda $-1 = 3$, de donde se concluye que $x = 2$ no es solución de la ecuación inicial

En conclusión, la única solución de la ecuación $2x - 5 = 1 + \sqrt{2x}$ es $x = \frac{9}{2}$.

b) Se elevan al cubo ambos miembros obteniéndose:

$$\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}\right)^3 = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{x} = 8$$

Despejando la raíz en esta última ecuación queda, $\sqrt{x} = 7$ y elevando ambos términos al cuadrado se obtiene $x = 49$.

Sustituyendo $x = 49$ en la ecuación $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2$ queda $2 = 2$ y, por tanto, se tiene que $x = 49$ es solución de la ecuación inicial.