6. Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 0$ **b)** $\dfrac{3}{x - 1} = \dfrac{8x}{2x - 1}$

Solución

a) Las soluciones de la ecuación son los valores de x que anulan el numerador y no anulan el denominador.

Igualando el numerador a 0 se obtiene la ecuación polinómica $x^2 - 5x + 4 = 0$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Hay que comprobar si estos valores anulan el denominador, $x^2 + 2x + 1$, de la ecuación inicial. En este caso, no se anula para ninguno de estos valores, por tanto, las soluciones de la ecuación dada son $x = 1$ y $x = 4$.

b) En primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0.

Pasando todos los términos al primer miembro queda, $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{8x}{2x - 1} = 0$. Restando las fracciones se obtiene, $\dfrac{3(2x - 1) - 8x(x - 1)}{(x - 1)(2x - 1)} = 0$, y haciendo operaciones, $\dfrac{-8x^2 + 14x - 3}{(x - 1)(2x - 1)} = 0$.

Para resolver la ecuación $\dfrac{-8x^2 + 14x - 3}{(x - 1)(2x - 1)} = 0$, se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose

$-8x^2 + 14x - 3 = 0$ cuyas soluciones son $x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(-8)(-3)}}{2(-8)} = \dfrac{-14 \pm \sqrt{100}}{-16} = \dfrac{-14 \pm 10}{-16} = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Al no anularse ninguno de los dos denominadores de la ecuación inicial para estos valores, se concluye que las soluciones de dicha ecuación son $x = \dfrac{1}{4}$ y $x = \dfrac{3}{2}$.