5. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ **b)** $2x^4 - x^3 - 3x^2 = 0$

Solución

a) El polinomio $x^3 + x^2 - 4x - 4$ tiene como raíz $x = -1$ ya que $(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4 = 0$. Dividiendo, mediante la regla de Ruffini, dicho polinomio por $x - (-1)$, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

Así, la ecuación inicial se puede escribir de la forma $(x + 1)(x^2 - 4) = 0$ y, teniendo en cuenta que $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, de la forma $(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$. De esta manera, sus soluciones son los valores que anulan uno cualquiera de los factores $(x + 1)$, $(x - 2)$ y $(x + 2)$:

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \qquad x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \qquad x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -1$, $x = 2$ y $x = -2$

b) Sacando factor común x^2 al polinomio del primer miembro de la ecuación, ésta se puede escribir de la forma, $x^2(2x^2 - x - 3) = 0$. Teniendo en cuenta que para que el producto de factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene:

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ doble}$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ doble, $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$.