ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

La expresión general de una ecuación con dos incógnitas, x e y, es $F(x, y) = 0$, siendo F una función.

Ejemplo: Son ecuaciones con dos incógnitas las siguientes:

$$y - x + 3 = 0,\ \ x + \ln y = 4,\ \ x^2 - 5x - y = 3 - 4x^3,\ \ e^{x+2} = y - 2,\ \ x^2 - 5x - y = 0,\ \ x^2 + y^2 - xy = 5$$

En esta unidad principalmente se consideran aquellas ecuaciones en las que se pueda despejar una incógnita en función de la otra, es decir, aquellas que sean equivalentes a una de la forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$, siendo f y g funciones de una variable.

La solución de la ecuación $y = f(x)$ es el conjunto de puntos (x, y) para los que se verifica dicha igualdad. Su representación gráfica corresponde a una curva en el plano de ejes cartesianos (análogamente para la ecuación $x = g(y)$).

Algunos tipos de ecuaciones con dos incógnitas a destacar por su sencillez y utilidad son:

- **Ecuaciones lineales**: $ax + by = c$, con $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

  El conjunto de soluciones de estas ecuaciones forman una recta en el plano.

- **Ecuaciones cuadráticas**:

  * $y = ax^2 + bx + c$ (o $x = ay^2 + by + c$), con $a \neq 0$. El conjunto de soluciones de estas ecuaciones forman una parábola en el plano.

  * $xy = a$, con $a \neq 0$. El conjunto de soluciones de estas ecuaciones forman una hipérbola en el plano.

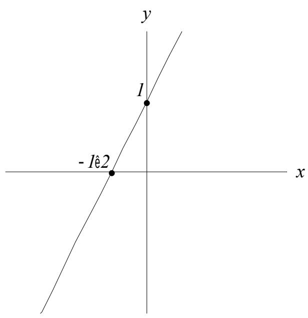
  * Ecuaciones equivalentes a una de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ con $r > 0$. El conjunto de soluciones de esta ecuación forman la circunferencia de centro el punto (a, b) y radio r.

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x - y + 1 = 0$

Despejando y en función de x queda $y = 2x + 1$.

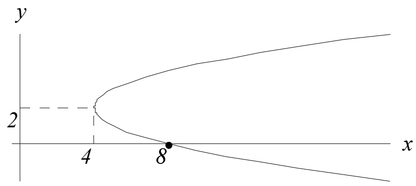
Por tanto, la solución de la ecuación lineal dada está formada por los puntos de la recta $y = 2x + 1$, es decir, los puntos de la forma $(x, 2x + 1)$, cuya representación se muestra en la siguiente figura:



b) $x - y^2 - 4y + 8 = 0$

Despejando x en función de y queda $x = y^2 + 4y - 8$.

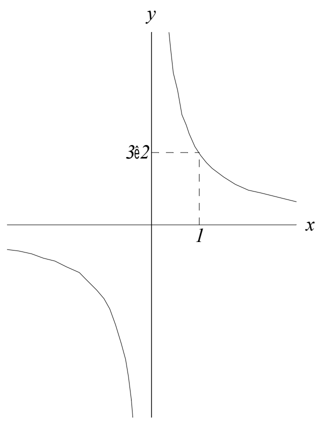
Por tanto, los puntos de la forma $(y^2 + 4y - 8, y)$ constituyen la solución de la ecuación cuadrática dada. Es decir, la solución es la parábola de eje horizontal $x = y^2 + 4y - 8$ representada en la siguiente figura:



c) $2xy - 3 = 0$

La ecuación se puede escribir de la forma $xy = \frac{3}{2}$, expresión que corresponde a una hipérbola.

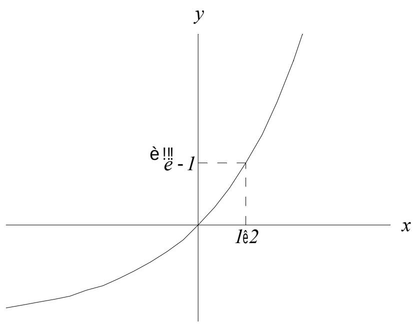
Por tanto, la solución de la ecuación cuadrática dada es la hipérbola $xy = \frac{3}{2}$ representada en la siguiente figura:



d) $y - e^x + 1 = 0$

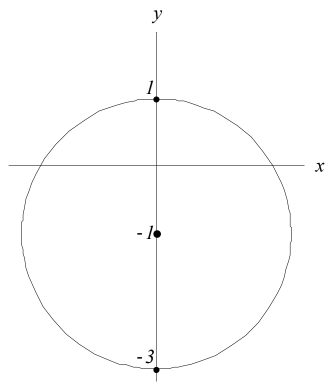
Despejando y en función de x queda $y = e^x - 1$.

Por tanto, la solución de esta ecuación es la curva $y = e^x - 1$ representada en la siguiente figura:



e) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$

La solución de esta ecuación es la circunferencia de centro el punto (0, -1) y radio 2 representada en la siguiente figura:



f) $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

En primer lugar se intenta escribir la ecuación de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, para determinar el centro (a, b) y el radio r de la circunferencia.

Para ello se suman y se restan los términos necesarios con el objeto de formar dos cuadrados perfectos:

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = (x^2 - 3x) + (y^2 - 4y) = \left(x^2 - 2\,\frac{3}{2}\,x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + (y^2 - 2.2y + (2)^2 - (2)^2) =$$

$$= \left(x^2 - 2\,\frac{3}{2}\,x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + (y^2 - 2.2y + 4) - 4$$

Por tanto, la ecuación inicial se puede poner de la forma $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4}$ y su solución es la circunferencia de centro el punto $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ y radio $\frac{5}{2}$ representada en la siguiente figura