Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

Ecuaciones con funciones elementales sencillas (exponencial y logaritmo)

Teniendo en cuenta que la función exponencial es inversa de la logarítmica y viceversa, en ocasiones es posible resolver ciertas ecuaciones en las que aparece una de estas dos funciones.

Para facilitar esta resolución, se indican a continuación algunas cuestiones a tener en cuenta:

- Es conveniente comenzar a resolver la ecuación despejando en uno de sus miembros un término que contenga una de estas funciones
- Si en una ecuación se aplica la función exponencial o logarítmica a los dos miembros se obtiene una ecuación equivalente, en otras palabras, la función exponencial y logarítmica son inyectivas
- La función exponencial siempre toma valores positivos
- Únicamente se puede calcular el logaritmo de números positivos
- Puede ser conveniente aplicar algunas propiedades de las potencias para simplificar la ecuación:

$$e^a\, e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^a)^b = e^{ab}$$

- Puede ser conveniente aplicar algunas propiedades de los logaritmos para simplificar la ecuación:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^b) = b \ln a$$

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\ln x + 1 = 1$

Haciendo operaciones para dejar el término logarítmico en un miembro queda $\ln x = 0$

aplicando la función exponencial que es inversa de la logarítmica se obtiene $e^{\ln x} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

Por tanto, la solución de la ecuación $\ln x + 1 = 1$ es $x = 1$

b) $e^{2x-3} - 3 = -2$

Haciendo operaciones para dejar el término exponencial en un miembro queda $e^{2x-3} = 1$

tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación $\ln(e^{2x-3}) = \ln 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Por tanto, la solución de la ecuación $e^{2x-3} - 3 = -2$ es $x = \frac{3}{2}$

c) $e^{3x+4} = -1$

Esta ecuación no tiene solución ya que la función exponencial toma siempre valores positivos.

d) $\ln(x^2 - 6) = \ln(-x)$

Teniendo en cuenta que la función logaritmo es inyectiva se obtiene la ecuación polinómica:

$$x^2 - 6 = -x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

Las soluciones de la ecuación polinómica obtenida son $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

Sustituyendo estos valores de x en la ecuación original se obtiene que la única solución de la ecuación $\ln(x^2 - 6) = \ln(-x)$ es $x = -3$, ya que los términos $\ln(x^2 - 6)$ y $\ln(-x)$ no existen para $x = 2$.

e) $e^{5x+5} - e^{-x-1} = 0$

Esta ecuación es equivalente a $e^{5x+5} = e^{-x-1}$ y teniendo en cuenta que la función exponencial es inyectiva, se obtiene:

$$5x + 5 = -x - 1 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Por tanto, la solución de la ecuación $e^{5x+5} - e^{-x-1} = 0$ es $x = -1$.