Ecuaciones racionales

Son aquellas ecuaciones equivalentes a una ecuación cuyo primer término es un cociente de polinomios y el segundo es cero, es decir, $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Ejemplo: Son ecuaciones racionales: $\frac{x^2 - 1}{8x^4 - x + 1} = 0$, $\frac{x^3 - 1}{x^8 + 3x} = \frac{x^2 - 1}{4x^5}$

No son ecuaciones racionales: $4x - 5\sqrt{x} = 0$, $3x - 5\cos x + 8 = 0$

La soluciones de estas ecuaciones son las soluciones de la ecuación polinómica obtenida al igualar el numerador a cero que además no anulan al polinomio del denominador, es decir, las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$ que no anulan al denominador $Q(x)$.

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$

Igualando el numerador a 0 se obtiene la ecuación polinómica $x^2 + 6x + 5 = 0$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.5}}{2} = \quad = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

El denominador de la ecuación inicial, $x + 1$, se anula para la solución $x = -1$, por tanto, la única solución de la ecuación $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 1} = 0$ es $x = -5$.

Se observa que en esta ecuación al factorizar el polinomio del numerador, la ecuación queda $\frac{(x + 1)\,(x + 5)}{x + 1} = 0$ y simplificando el factor $x + 1$ se obtiene la ecuación $x + 5 = 0$ cuya solución es $x = -5$.

b) $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2}$

Para resolverla, en primer lugar, se realizan las operaciones necesarias para escribir la ecuación como un cociente de polinomios igualado a 0:

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} - \frac{x}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} - \frac{x\,(x + 2)}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2 - (x^2 + 2x)}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$$

Para resolver la ecuación $\frac{2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$, se iguala el polinomio del numerador a 0 obteniéndose

$$2 - 2x = 0 \text{ cuya solución es } x = 1$$

y como $x = 1$ no anula el polinomio del denominador, se tiene que es la solución.

En consecuencia, la solución de la ecuación $\frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} = \frac{x}{x - 2}$ es $x = 1$.