

Ecuaciones polinómicas de cualquier grado

Una ecuación polinómica de grado n es equivalente a una de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ con } a_n \neq 0$$

Si en una ecuación polinómica el polinomio está factorizado (está expresado como producto de polinomios de grado 1 o de mayor grado pero sin raíces reales), es inmediato el cálculo de sus soluciones teniendo en cuenta que un producto de factores es igual a cero si y sólo si alguno de los factores es nulo. De esta forma, las soluciones de la ecuación se obtendrán resolviendo cada una de las ecuaciones polinómicas obtenidas al igualar cada uno de los factores a cero.

Ejemplo: La ecuación $(2x^2 + 5)(x - 3)(1 + x) = 0$ tiene por soluciones $x = 3$ y $x = -1$.

En efecto, al estar factorizado el polinomio, las soluciones de la ecuación se calculan resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$2x^2 + 5 = 0 \text{ que no tiene soluciones}$$

$$x - 3 = 0 \text{ cuya solución es } x = 3$$

$$1 + x = 0 \text{ cuya solución es } x = -1$$

Los siguientes resultados permiten, en algunos casos, factorizar un polinomio:

- Si no hay término independiente, es decir $a_0 = 0$, se saca factor común la mayor potencia posible de x
- La diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia
- Si un polinomio de coeficientes enteros es divisible por $x - x_0$, con x_0 un número entero, entonces x_0 es divisor del término independiente a_0
- Un polinomio es divisible por $x - x_0 \Leftrightarrow x_0$ es solución de la ecuación polinómica resultante de igualar ese polinomio a cero

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(2x - 3)(1 - x)(x + 6) = 0$

Como el polinomio está factorizado las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{3}{2}$, $x = 1$ y $x = -6$.

b) $2x^3 + 5x^2 = 0$

Para resolver esta ecuación, al ser el término independiente 0, se saca factor común x^2 , quedando $x^2(2x + 5) = 0$. Al estar el polinomio factorizado las soluciones son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ doble}$$

$$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Por tanto, las soluciones son $x = 0$ doble y $x = -\frac{5}{2}$.

c) $x^4 - 25 = 0$

Teniendo en cuenta que el polinomio $x^4 - 25$ es diferencia de cuadrados (los cuadrados de x^2 y de 5), la ecuación se puede escribir de la forma $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 0$.

Las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores. Como la ecuación $x^2 + 5 = 0$ no tiene solución, las únicas soluciones de la ecuación inicial son las de $x^2 - 5 = 0$, es decir, $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$.

d) $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$

Para factorizar el polinomio $4x^3 + 8x^2 - x - 2$ se tiene en cuenta que los divisores enteros del término independiente, -2 , son $1, -1, 2$ y -2 . Sustituyendo $x = 1, x = -1, x = 2$ y $x = -2$ en la ecuación se observa que únicamente $x = -2$ es solución. Dividiendo $4x^3 + 8x^2 - x - 2$ entre $x - (-2) = x + 2$, mediante la Regla de Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 8 & -1 & -2 \\ -2 & & -8 & 0 & 2 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Por tanto, el polinomio se puede escribir de la forma $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = (x + 2)(4x^2 - 1)$ y la ecuación inicial se puede expresar como $(x + 2)(4x^2 - 1) = 0$. Así, las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \qquad 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

Por tanto, las soluciones son $x = -2, x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

e) $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = 0$

Aplicando la Regla de Ruffini para factorizar el polinomio $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3$, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -4 & -4 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & & -1 & 3 & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 & \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & & \end{array}$$

Así, la ecuación inicial se puede expresar de la forma $(x + 1)^2(x - 3)(x^2 + 1) = 0$. Como el polinomio está factorizado las soluciones de la ecuación son los números que anulan uno cualquiera de los factores:

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ doble} \qquad x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \qquad x^2 + 1 = 0 \text{ no tiene solución}$$

Por tanto, las soluciones son $x = 3$ y $x = -1$ doble.

Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son únicamente $x = \pm\sqrt{3}$ ya que $\pm\sqrt{-2}$ no son números reales.