

Ecuaciones polinómicas de primer grado

Una ecuación polinómica de primer grado o lineal es equivalente a una de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$.

Para resolverla se pasan todos los términos con x a un miembro y los que no tienen x al otro, por último se despeja la incógnita y se obtiene una única solución:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Ejemplo: Para resolver la ecuación $7x - 18 = 3x$, se realizan los siguientes pasos:

$$1^{\circ}) \text{ se pasa 18 sumando al segundo miembro} \quad 7x = 3x + 18$$

$$2^{\circ}) \text{ se pasa 3x restando al primer miembro} \quad 4x = 18$$

$$3^{\circ}) \text{ se pasa 4 dividiendo al segundo miembro} \quad x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Por tanto, la ecuación $7x - 18 = 3x$ tiene una única solución que es $x = \frac{9}{2}$

Ecuaciones polinómicas de segundo grado

Una ecuación polinómica de segundo grado o cuadrática es equivalente a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

Se puede demostrar que las soluciones de una ecuación de segundo grado vienen dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ que aparece dentro de la raíz cuadrada de la fórmula anterior se le llama **discriminante** de la ecuación. Teniendo en cuenta que para resolver la ecuación es necesario calcular la raíz cuadrada del discriminante se tienen los siguientes casos:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene una única solución que es doble o de multiplicidad 2 (se puede considerar que la ecuación tiene dos soluciones iguales).
- Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene solución.

Observar que en esta unidad se considera que se resuelven las ecuaciones en el conjunto de los números reales. Si se hiciera la resolución en el conjunto de los números complejos, la conclusión del apartado c) sería que la ecuación no tiene raíces reales pero sí complejas. (Ver la [Unidad Didáctica de Números Complejos](#))

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$$a) \quad 2x^2 + 5x - 3 = 0. \text{ Aplicando la fórmula se tiene } x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son $x = \frac{1}{2}$ y $x = -3$.

$$b) \quad 4x^2 - 12x + 9 = 0. \text{ Aplicando la fórmula se tiene } x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la única solución es $x = \frac{3}{2}$ que es doble o de multiplicidad 2.

c) $x^2 - 2x + 9 = 0$. Aplicando la fórmula se tiene $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-32}}{4}$ y se concluye que no existe solución ya que el discriminante es negativo.

En la resolución de determinadas ecuaciones polinómicas de grado 2 no merece la pena aplicar la fórmula anterior. En concreto, cuando el coeficiente b o c es cero la resolución es inmediata teniendo en cuenta que:

- Si $b = 0$, se tiene la ecuación $ax^2 + c = 0$ que se resuelve despejando x^2 y tomando raíces cuadradas si es posible

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}, \text{ si } \frac{-c}{a} \geq 0$$

- Si $c = 0$, se tiene la ecuación $ax^2 + bx = 0$ y se resuelve sacando factor común la incógnita x y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

- a) $5x^2 - 20 = 0$. Despejando x^2 se tiene $x^2 = 4$ y tomando raíces cuadradas $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -2$ y $x = 2$.
- b) $3x^2 + 7 = 0$. Despejando x^2 se tiene $x^2 = \frac{-7}{3}$ y como el cuadrado de un número no puede ser negativo se deduce que la ecuación no tiene soluciones.
- c) $-3x^2 + 4x = 0$. Sacando factor común la x se tiene $x(-3x + 4) = 0$. Teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se obtiene que o bien $x = 0$ o bien $-3x + 4 = 0$, es decir $x = \frac{4}{3}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = \frac{4}{3}$.