Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

POTENCIAS Y RAÍCES

CONCEPTOS

Se llama **potencia** de **base *a*** y **exponente** el número natural ***n*** al resultado de multiplicar *n* veces el número *a* y se representa $a^n = \overbrace{a.\ a\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ a}^{n \text{ veces})}$

Ejemplo 1: $7^2 = 7.7 = 49$ $\quad (-3)^4 = (-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3) = 81$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Si el exponente es un número entero negativo la potencia se define $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplo 2: $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ $\quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$

Se llama **raíz *n*-ésima** de *a* al número *b* tal que $b^n = a$ y se representa $\sqrt[n]{a} = b$. Al número *n* se le llama **índice** de la raíz y al número *a* **radicando**.

Ejemplo 3:
$\sqrt[4]{625} = 5$ ya que $5^4 = 625$ $\quad \sqrt{121} = 11$ ya que $11^2 = 121$ $\quad \sqrt[3]{-0{'}001} = -0{'}1$ ya que $(-0{'}1)^3 = -0{'}001$

Si el exponente de una potencia es un número fraccionario, la potencia se define $a^{p\,/\,q} = \sqrt[q]{a^p}$

Ejemplo 4: $2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ $\quad 25^{-1/2} = \frac{1}{25^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

CONVENIO: $a^0 = 1$, cualquiera que sea el número real no nulo *a* .

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

1. Para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes, es decir, $a^n\,.\,a^m = a^{n+m}$

   Ejemplo 5: $6^{-2}\,.\,6^3.\,6^4 = 6^{-2+3+4} = 6^5$ $\quad 7^5.7^{-3}.7^{1/2} = 7^{5-3+1/2} = 7^{5/2}$

2. Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes, es decir, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

   Ejemplo 6: $\frac{6^5}{6^2} = 6^{5-2} = 6^3$ $\quad \frac{\sqrt[3]{2^8}}{2^2} = \frac{2^{8/3}}{2^2} = 2^{8/3\,-\,2} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2}$

3. Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes, es decir, $\left(a^n\right)^m = a^{n.\,m}$

   Ejemplo 7: $\left(5^3\right)^{-2} = 5^{-6}$ $\quad \sqrt{\sqrt[3]{5}} = \left(5^{1/3}\right)^{1/2} = 5^{1/6} = \sqrt[6]{5}$

4. La potencia de un producto es igual al producto de las potencias, es decir, $(a.b)^n = a^n\,.\,b^n$

   Ejemplo 8: $(6x)^3 = 6^3x^3 = 216x^3$

5. La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias, es decir, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

   Ejemplo 9: $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

1. La raíz de un producto es igual al producto de las raíces (corresponde a la propiedad 4 de potencias) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}$

   Ejemplo 10: $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27.1000} = \sqrt[3]{27}\,.\,\sqrt[3]{1000} = 3.10 = 30$

2. La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces (corresponde a la propiedad 5 de potencias) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

   Ejemplo 11: $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$

3. Al dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número el valor de la raíz no varía. $\sqrt[n.m]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

   Esta propiedad es útil para sacar factores fuera de una raíz.

   Ejemplo 12:

   a) $\sqrt[6]{5^{15}} = \sqrt{5^5}$ (se ha dividido el índice y el exponente entre 3)

   b) $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$ (se ha dividido el índice y el exponente entre 3)

   c) $\sqrt[5]{3^{16}} = \sqrt[5]{3^{15}.3} = \sqrt[5]{3^{15}}.\sqrt[5]{3} = 3^3\ \sqrt[5]{3}$ (se ha dividido el índice y el exponente entre 5)

Aplicando las anteriores propiedades anteriores, el producto y cociente de raíces se calculan de la siguiente forma:

- Si tienen el mismo índice: $\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ $\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

  Ejemplo 13: $\sqrt[3]{5}\ \sqrt[3]{0'025} = \sqrt[3]{5.\ 0'025} = \sqrt[3]{0'125} = \sqrt[3]{0'5^3} = 0'5$ $\qquad \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2$

- Si tienen distinto índice, es necesario conseguir que tengan el mismo. Para ello, previamente se halla el mínimo común múltiplo de los índices y se consigue que todas las raíces tengan ese índice aplicando la propiedad 3 escrita de la forma $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.m]{a^m}$

  Ejemplo 14:

  a) $\sqrt[6]{5}\ \sqrt[4]{125}$

  En primer lugar, se ha de conseguir un índice común para ambas raíces. Este será el m.c.m.(6, 4) = 12. Aplicando la propiedad 3, se tiene $\sqrt[6]{5} = \sqrt[6.2]{5^2} = \sqrt[12]{5^2}$ y $\sqrt[4]{125} = \sqrt[4.3]{125^3} = \sqrt[12]{125^3}$.

  Por tanto, $\sqrt[6]{5}\ \sqrt[4]{125} = \sqrt[12]{5^2}\ \sqrt[12]{125^3} = \sqrt[12]{5^2 125^3} = \sqrt[12]{5^2\left(5^3\right)^3} = \sqrt[12]{5^2 5^9} = \sqrt[12]{5^{11}}$

  b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[6]{14}}$

  Como m.c.m.(6, 3) = 6, se tiene $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[6]{14}} = \frac{\sqrt[3.2]{7^2}}{\sqrt[6]{14}} = \sqrt[6]{\frac{49}{14}} = \sqrt[6]{\frac{7}{2}}$

FUNCIÓN POTENCIAL Y FUNCIÓN EXPONENCIAL

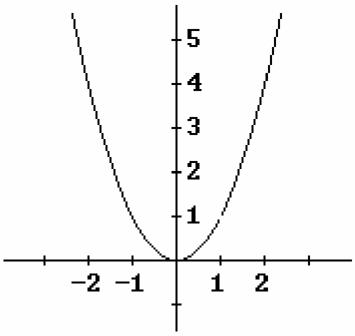
(Para más información ver Unidad didáctica 7: Funciones reales de variable real)

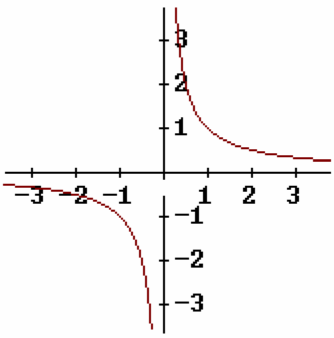
Se llama **función potencial** a cualquier función de la forma $f(x) = x^a$, siendo a un número real fijo.

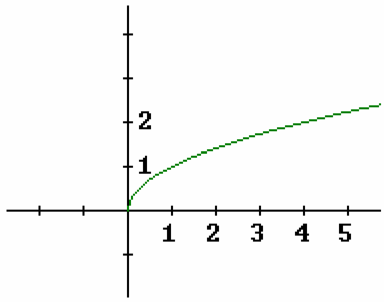
Ejemplo 15: Son funciones potenciales: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{-1}$, $h(x) = x^{1/2}$.

El dominio, gráfica y características de una función potencial depende del número a que figura en el exponente.

Ejemplo 16: Los dominios y gráficas de las funciones potenciales del ejemplo anterior son:







$f(x) = x^2$ con D = $(-\infty, +\infty)$ $g(x) = x^{-1}$ con D = $\mathbb{R} - \{0\}$ $h(x) = x^{1/2}$ con D = $[0, +\infty)$

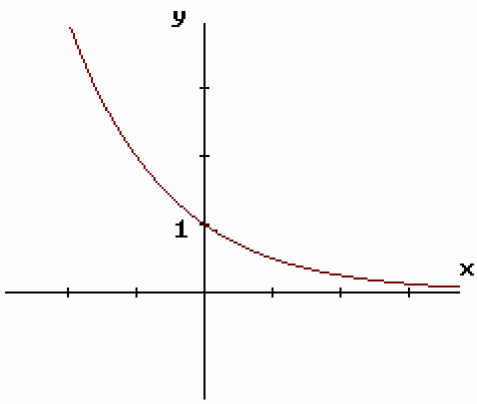
Se llama **función exponencial de base *a***, con $a > 0$, a la función $f(x) = a^x$. También de denota $f(x) = \exp_a x$.

La función exponencial más utilizada es la que tiene por base el número e, de hecho cuando hablemos de la "función exponencial" sin especificar la base, entenderemos que es la que tiene por base dicho número.

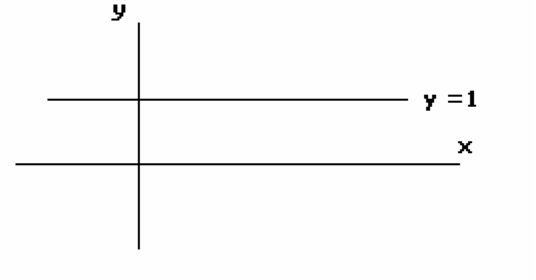
Ejemplo 17: Son funciones exponenciales $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $g(x) = e^x$

El dominio de las funciones exponenciales es $\mathbb{R}$ y las gráficas son similares, dependiendo del valor de la base a:

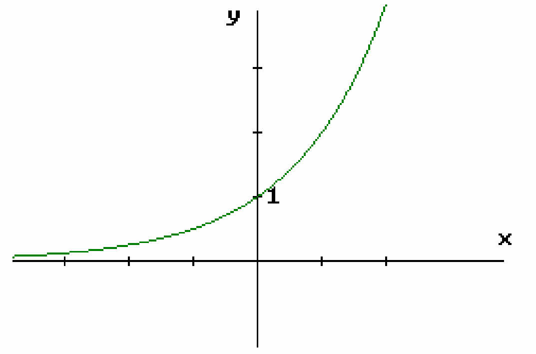
- Si $0 < a < 1$, la función $f(x) = a^x$ es estrictamente decreciente y su gráfica es del tipo:



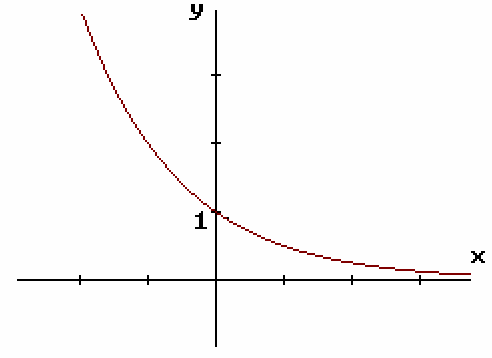
- Si $a = 1$, se obtiene la función constante $f(x) = 1^x = 1$, cuya gráfica es:



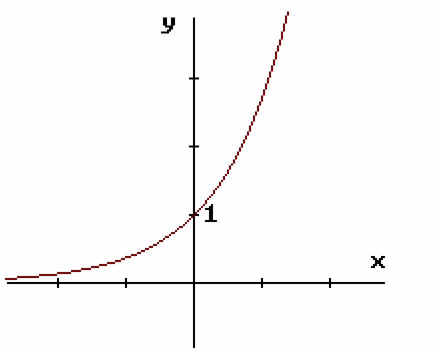
- Si $a > 1$, la función $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente y su gráfica es del tipo



Ejemplo 18: Las gráficas de las funciones exponenciales del ejemplo anterior son:



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$g(x) = e^x$