Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

EJERCICIOS RESUELTOS DE POTENCIAS Y RAÍCES

1. Realizar las siguientes operaciones: **a)** $\left(2^3\right)^{-1}+\dfrac{2^3}{2^{-1}}+2^{-1}\,2^3$ **b)** $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\left(\dfrac{a^{-1}b^{-2}}{(ab)^{-3}}\right)^{-1}$

Solución

a) $\left(2^3\right)^{-1}+\dfrac{2^3}{2^{-1}}+2^{-1}\,2^3 = 2^{3(-1)}+2^{3-(-1)}+2^{-1+3} = 2^{-3}+2^4+2^2 = \dfrac{1}{2^3}+16+4 = \dfrac{1}{8}+20$
$=\dfrac{1+160}{8}=\dfrac{161}{8}$

b) Estas operaciones se pueden realizar de distintas maneras que evidentemente han de conducir al mismo resultado, a continuación se muestra una de ellas:

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\left(\frac{a^{-1}b^{-2}}{(ab)^{-3}}\right)^{-1} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\,\frac{a\,b^2}{a^3b^3} = \frac{\frac{b+a}{a\,b}}{\frac{b^2-a^2}{a^2\,b^2}}\,\frac{1}{a^2\,b} = \frac{\frac{b+a}{a\,b}}{\frac{b^2-a^2}{a^2\,b^2}\,a^2\,b} = \frac{\frac{b+a}{a\,b}}{\frac{b^2-a^2}{b}} = \frac{b+a}{a\,b}:\frac{b^2-a^2}{b} =$$

$$= \frac{(b+a)\,b}{a\,b\,(b+a)\,(b-a)} = \frac{1}{a\,(b-a)}$$

2. Realizar las siguientes operaciones:
a) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ **b)** $(1-\sqrt{18})\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c)** $\sqrt[3]{5^4}+3\sqrt[3]{40}$ **d)** $\sqrt[3]{16ab^2}+\sqrt[3]{250ab^2}+\sqrt[6]{4a^2b^4}$

Solución

a) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}-1)(2+3-2\sqrt{2}\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)(5-2\sqrt{6}) = 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{6}-5+2\sqrt{6} =$
$= 5\sqrt{3}-2\sqrt{3^2 2}-5+2\sqrt{6} = 5\sqrt{3}-6\sqrt{2}-5+2\sqrt{6}$

b) $(1-\sqrt{18})\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{18}\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{36}-\sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-6-\sqrt{9} =$
$= \sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-6-3 = \sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-9 = \dfrac{2+1-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt[3]{5^4}+3\sqrt[3]{40} = 5\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{2^3.5} = 5\sqrt[3]{5}+6\sqrt[3]{5} = 11\sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[3]{16ab^2}+\sqrt[3]{250ab^2}+\sqrt[6]{4a^2b^4} = \sqrt[3]{2^4\,ab^2}+\sqrt[3]{2.5^3\,ab^2}+\sqrt[6]{2^2\,a^2b^4} = 2\sqrt[3]{2ab^2}+5\sqrt[3]{2ab^2}+\sqrt[3]{2ab^2} =$
$= 8\sqrt[3]{2ab^2}$

Observar en la segunda igualdad que en la raíz $\sqrt[6]{2^2\,a^2b^4}$ se han dividido el índice y los exponentes entre 2.

3. Decir si las siguientes igualdades son ciertas:

a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{3}-2}$

Solución

a) Al ser positivos ambos miembros de la igualdad $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, esta será cierta si el cuadrado del primer término es igual al radicando del segundo.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

Luego la igualdad es cierta.

b) La igualdad $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ no es cierta ya que el primer miembro es un número negativo ($\sqrt{3}$ es mayor que 1) y el segundo es positivo.

c) La igualdad $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{3}-2}$ no es cierta ya el segundo miembro no existe pues es la raíz cuadrada de un número negativo ($\sqrt{3}$ es menor que 2).

4. Indicar cuál de los dos números es mayor expresando para ello las raíces con el mismo índice:

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[5]{8}$ **b)** $\sqrt[3]{30}$ y $\sqrt[5]{280}$ **c)** $\sqrt[4]{4}$ y $\sqrt[6]{6}$

Solución

a) Al ser m.c.m(2, 5) = 10, se tiene:

$$\sqrt{2} = \sqrt[2.5]{2^5} = \sqrt[10]{32} \qquad \sqrt[5]{8} = \sqrt[5.2]{8^2} = \sqrt[10]{64}$$

Como 32 < 64, se deduce que $\sqrt[10]{32} < \sqrt[10]{64}$, por tanto $\sqrt[5]{8}$ es mayor que $\sqrt{2}$.

b) Como m.c.m(3, 5) = 15, se tiene:

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3.5]{30^5} = \sqrt[15]{24300000} \qquad \sqrt[5]{280} = \sqrt[5.3]{280^3} = \sqrt[15]{21952000}$$

Por tanto, $\sqrt[3]{30}$ es mayor que $\sqrt[5]{280}$

c) Como m.c.m(4, 6) = 12, se tiene:

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4.3]{4^3} = \sqrt[12]{64} \qquad \sqrt[6]{6} = \sqrt[6.2]{6^2} = \sqrt[12]{36}$$

Por tanto, $\sqrt[4]{4}$ es mayor que $\sqrt[6]{6}$

5. Realizar las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{1+\sqrt{2}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{5}{\sqrt{2}-1}} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}}$ **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{ab^2}{a+b}} \cdot \sqrt{\dfrac{a^2b}{a-b}}$

Solución

a) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{5\left(1+\sqrt{2}\right)+3\left(1-\sqrt{2}\right)}{(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{5+5\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}}{1-2}=\dfrac{8+2\sqrt{2}}{-1}=-8-2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{5}{\sqrt{2}-1}}.\sqrt{\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{5.3}{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1)}}=\sqrt{\dfrac{15}{2-1}}=\sqrt{15}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}}.\sqrt[6]{\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{(1+\sqrt{3})^2}}.\sqrt[6]{\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}}=\sqrt[6]{\dfrac{1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2(\sqrt{3}-1)}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{3-1}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$

d) $\sqrt{\dfrac{ab^2}{a+b}}.\sqrt{\dfrac{a^2b}{a-b}}=\sqrt{\dfrac{a^3b^3}{a^2-b^2}}=ab\sqrt{\dfrac{ab}{a^2-b^2}}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** $5^{1+x}=25^{x^2}$ **b)** $3^x+3^{x+1}=4$ **c)** $2^{1-x^2}=\dfrac{1}{16}$

Solución

a) Aplicando propiedades de las potencias se tiene:

$$5^{1+x}=25^{x^2} \Leftrightarrow 5^{1+x}=\left(5^2\right)^{x^2} \Leftrightarrow 5^{1+x}=5^{2x^2}$$

Para que dos potencias de la misma base sean iguales se ha de cumplir que los exponentes también sean iguales, así

$$1+x=2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}\dfrac{4}{4}=1\\[2mm] \dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

Por tanto, $x=1$ y $x=\dfrac{-1}{2}$ son las soluciones.

b) Escribiendo $3^{x+1}=3.\,3^x$ la ecuación queda $3^x+3.3^x=4$. Sacando 3^x factor común se tiene $3^x(1+3)=4$, es decir, $3^x=1$.
Por tanto, $x=0$ es la solución de la ecuación.

c) Procediendo de forma similar a la del apartado a) se tiene:

$$2^{1-x^2}=\frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{1-x^2}=\frac{1}{2^4} \Leftrightarrow 2^{1-x^2}=2^{-4} \Leftrightarrow 1-x^2=-4 \Leftrightarrow 5=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

Por tanto, las soluciones son $x=\sqrt{5}$ y $x=-\sqrt{5}$.