Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

LOGARITMOS

CONCEPTOS

Dado un número real $a > 0$ y $a \neq 1$ el **logaritmo en base *a*** de un número b es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener b. Se representa $\log_a b$.

Simbólicamente lo anterior se puede expresar: $\log_a b = c \iff a^c = b$

Ejemplo 1: $\log_3 81 = 4$ ya que $3^4 = 81$.

Como se puede apreciar el cálculo del logaritmo en base a de b no tiene porqué ser sencillo, únicamente lo es en el caso de que el número b sea una potencia de a.

En la práctica los valores más utilizados como base de un logaritmo son $a = 10$ y $a = e$, recibiendo el nombre de **logaritmo decimal** y **logaritmo neperiano** respectivamente.

El logaritmo neperiano se suele denotar $\ln b$ o $\log b$, en este curso lo denotaremos de la primera forma.

PROPIEDADES

1. $\log_a a = 1$

   Ejemplo 2: $\log_3 3 = 1$, $\log_{10} 10 = 1$, $\ln e = 1$.

2. $\log_a 1 = 0$

   Ejemplo 3: $\log_6 1 = 0$, $\log_{10} 1 = 0$, $\ln 1 = 0$.

3. $\log_a a^b = b$

   Ejemplo 4: $\log_5 5^2 = 2$, $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$, $\log_{10} 0'001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$, $\ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$.

4. $a^{\log_a b} = b$

   Ejemplo 5: $7^{\log_7 25} = 25$, $10^{\log_{10} 9} = 9$, $e^{\ln 2'5} = 2'5$.

5. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos, $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

   Ejemplo 6: $\log_3(9x) = \log_3 9 + \log_3 x = \log_3 3^2 + \log_3 x = 2 + \log_3 x$

6. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos, $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

   Ejemplo 7: $\log_3 \frac{27}{x} = \log_3 27 - \log_3 x = \log_3 3^3 - \log_3 x = 3 - \log_3 x$

7. El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base, $\log_a b^c = c \log_a b$

   Ejemplo 8: $\log_2 \sqrt{5x} = \log_2 (5x)^{1/2} = \frac{1}{2} \log_2 5x$

8. $\log_{a'} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a a'}$

   Esta fórmula permite escribir cualquier logaritmo en función de logaritmos neperianos, así $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

Ejemplo 9: $\log_7 e^2 = \dfrac{\ln e^2}{\ln 7} = \dfrac{2}{\ln 7}$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

(Para más información ver Unidad didáctica 7: Funciones reales de variable real)

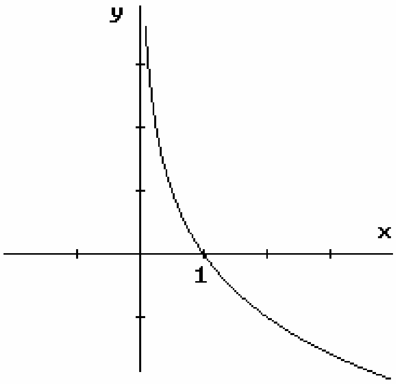
Se llama **función logarítmica de base *a*** a la función $f(x) = \log_a x$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$.

La función logarítmica más utilizada es la que tiene por base el número e, de hecho cuando hablemos de la "función logarítmica" sin especificar la base, entenderemos que es la que tiene por base dicho número.

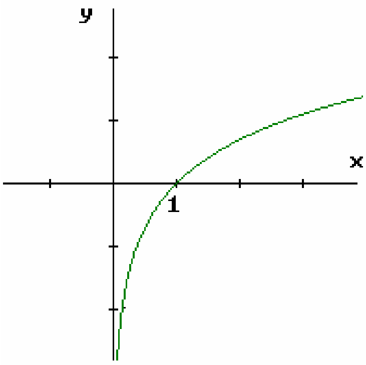
Ejemplo 10:
Son funciones logarítmicas: $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_{10} x$ (logaritmo decimal), $h(x) = \ln x$ (logaritmo neperiano).

El dominio de las funciones logarítmicas es $(0, +\infty)$ y las gráficas son similares, dependiendo del valor de a:

- Si $0 < a < 1$, la función $f(x) = \log_a x$ es estrictamente decreciente y su gráfica es del tipo:



- Si $a > 1$, la función $f(x) = \log_a x$ es estrictamente creciente y su gráfica es del tipo



Teniendo en cuenta la definición de logaritmo, se observa que la función logarítmica, $f(x) = \log_a x$, es la función inversa de la exponencial con la misma base, $g(x) = a^x$. Eso quiere decir que si se aplican seguidas a un mismo número se obtiene dicho número, es decir, $(f \circ g)(x) = \log_a a^x = x$ y $(g \circ f)(x) = a^{\log_a x} = x$.

Al ser la función logarítmica la función inversa de la exponencial, las tablas de valores de ambas funciones son iguales si se cambian las columnas entre sí y de ahí que sus gráficas sean simétricas respecto de la recta $y = x$.

Ejemplo 11: Las tablas de valores de $g(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$ y sus gráficas son:

x	e^x
-1	$1/e$
-1/2	$1/\sqrt{e}$
0	1
1	e
2	e^2

x	$\ln x$
$1/e$	-1
$1/\sqrt{e}$	-1/2
1	0
e	1
e^2	2