Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

En este apartado se estudian las **fracciones algebraicas** que son aquellas en las que el numerador y denominador son polinomios.

Las mismas reglas que se siguen para realizar operaciones con fracciones son válidas para las operaciones con fracciones algebraicas, ahora bien para obtener el mínimo común múltiplo, cuando esto sea necesario, la descomposición de un polinomio en producto de factores resulta algo más complicada que en el caso de números enteros. A continuación, se recuerdan algunos resultados sobre polinomios que son útiles para dicha descomposición.

- El número a es raíz o cero del polinomio $P(x)$ si y sólo si $P(x) = (x - a).\ Q(x)$, siendo $Q(x)$ otro polinomio.
- Si el número entero a es raíz o cero del polinomio $P(x)$ entonces el término independiente de $P(x)$ es múltiplo de a. Por ello se buscan las raíces enteras de un polinomio entre los divisores del término independiente.

Ejemplo 15: Factorizar el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2x$

- Se saca x factor común $P(x) = x\ (x^3 + x^2 - x + 2)$
- Sustituyendo los divisores del término independiente de $Q(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ (que son 1, -1, 2, -2) en $Q(x)$ se comprueba si alguno de ellos es raíz de dicho polinomio

  $Q(1) = 1 + 1 - 1 + 2 = 3 \neq 0$ $\qquad Q(-1) = -1 + 1 + 1 + 2 = 3 \neq 0$ $\qquad Q(2) = 8 + 4 - 2 + 2 = 12 \neq 0$

  $Q(-2) = -8 + 4 + 2 + 2 = 0$, por tanto, se puede escribir $Q(x) = (x + 2)\ M(x)$
- Para calcular $M(x)$ se divide $Q(x)$ entre $x + 2$, división que se puede efectuar por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

  Así $M(x) = x^2 - x + 1$, cuyas raíces vienen dadas por $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$. Al ser el discriminante negativo no existen raíces reales de $M(x)$ y en consecuencia $M(x)$ no se puede factorizar.
- Por tanto, $P(x) = x\ (x + 2)\ (x^2 - x + 1)$

A continuación se muestran algunos ejemplos de operaciones con fracciones algebraicas:

Ejemplo 16:

a) $\dfrac{x^2-1}{3x^3-2x+3} - \dfrac{1-5x}{3x^3-2x+3} = \dfrac{x^2-1-1+5x}{3x^3-2x+3} = \dfrac{x^2+5x-2}{3x^3-2x+3}$

En este caso, como los denominadores de ambas fracciones son iguales, basta restar los numeradores.

b) $\dfrac{2x^3+1}{2x^3+3x^2-18x-27} + \dfrac{x+2}{x^2+3x}$

Al ser los denominadores distintos se ha de buscar un denominador común, para ello se factorizan:

$2x^3+3x^2-18x-27 = (2x+3)\ (x+3)\ (x-3)$ $\qquad x^2+3x = x(x+3)$

Así m.c.m.$(2x^3+3x^2-18x-27,\ x^2+3x) = (2x+3)\ (x+3)\ (x-3)x$

Escribiendo las fracciones con el mismo denominador y sumando los numeradores queda:

$$\frac{2x^3+1}{2x^3+3x^2-18x-27} + \frac{x+2}{x^2+3x} = \frac{(2x^3+1)x}{(2x+3)(x+3)(x-3)x} + \frac{(x+2)(2x+3)(x-3)}{(2x+3)(x+3)(x-3)x} = \frac{2x^4+x+2x^3+x^2-15x-18}{(2x+3)(x+3)(x-3)x} =$$

$$= \frac{2x^4+2x^3+x^2-14x-18}{2x^4+3x^3-18x^2-27x}$$

Ejemplo 17:

a) $\frac{x}{x-2} \cdot \frac{x^2-3}{x+2} = \frac{x(x^2-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^3-3x}{x^2-4}$

b) $\frac{2x^3+x^2}{2x^3+3x^2-18x-27} \cdot \frac{3-x}{x^2+3x} = \frac{(2x^3+x^2)(3-x)}{(2x^3+3x^2-18x-27)(x^2+3x)} = \frac{x^2(2x+1)(3-x)}{(2x+3)(x+3)(x-3)x(x+3)} = \frac{-x(2x+1)}{(2x+3)(x+3)^2}$

En este caso, en lugar de realizar los productos en el numerador y en el denominador, estos se factorizan con el objeto de simplificar la fracción.

Ejemplo 18: $\frac{5x^3-3x^2}{x^4-x^3+x^2+x-2} : \frac{x^3-x^2+2x}{3x+3} = \frac{(5x^3-3x^2)(3x+3)}{(x^4-x^3+x^2+x-2)(x^3-x^2+2x)} = \frac{x^2(5x-3)\,3\,(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+2)\,x\,(x^2-x+2)} =$

$$= \frac{3x(5x-3)}{(x-1)(x^2-x+2)^2}$$

En la segunda igualdad se ha escrito el resultado de factorizar el numerador y denominador de la fracción, con el objeto de efectuar alguna simplificación.